Disequazioni esponenziali

DEFINIZIONE

Si dice disequazioni esponenziali, la disequazione nella quale l'incognita figura ad esponente.
In simboli:

$$F(a_i^{f_i(x)}) \gtrless 0 \quad \text{con a} > 0;\ \text{i} = 1,2,...,\text{n}$$

Come per le equazioni il simbolo:

$$F(a_i^{f_i(x)})$$

esprime un'espressione contenete più funzioni esponenziale con basi anche differenti.
Nel presente paragrafo si presentano le disequazioni esponenziali elementari del tipo:

(1) $$a^{f_1(x)} \gtrless a^{f_2(x)} \text{ con a} > 0$$

o ad essa riconducibile.
Per la risoluzione della (1) distinguiamo i casi:

1) Caso 0 < a < 1

Per quanto detto a livello di definizione di funzione esponenziale si ha:

$$a^{f_1(x)} \gtrless a^{f_2(x)}$$

Implica:

$$f_1(x) \lessgtr f_2(x)$$

Quindi la soluzione della (1) è data dai valori di x che soddisfanno il sistema:

$$\begin{cases} f_1(x) \lessgtr f_2(x) \\ I.E. \end{cases}$$

con I.E. insieme di esistenza della (1).

ESEMPIO

a) Risolvere la disequazione:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \quad \text{I.E.}: \forall \text{x} \in \text{R}$$

Si ha:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-2)}$$

Scende:

$$x < 2(x - 2) \rightarrow x > 4; \quad S \equiv (4;+\infty)$$

b) Risolvere la disequazione:

$$\left(\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-1} - 1\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right] > 0$$

$$\text{I.E.}: \forall x \in R.$$

Si studiano i segni dei singoli fattori:

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-1} - 1 > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-1} > 1$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-1} > \left(\frac{1}{e}\right)^0 \rightarrow x^2 - 1 < 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ \forall x \end{cases} \rightarrow -1 < x < 1$$

$$S_1 \equiv (-1;1).$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0$$

Essendo il primo membro la somma di quantità positive si ha:

$$S_2 \equiv \forall x$$

Soluzione della disequazione data:

$$S \equiv (-1;1)$$

c) Risolvere la disequazione:

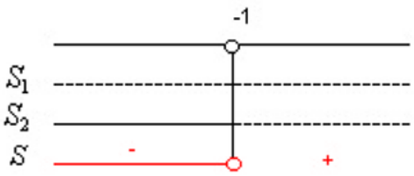
$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|} - 25}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2} \leq 0$$

$$\text{I.E}:\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2\neq 0\rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\neq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\rightarrow x\neq -1$$

Si studiano i segni del numeratore e del denominatore:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|}-25>0\rightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|}\geq\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$
$$|x|\leq -2\rightarrow S_1\equiv\Phi$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2>0\rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$
$$x<-1$$

Riportando in schema si ha:



$$S\equiv(-\infty;-1)$$

d) Risolvere la disequazione:

$$\frac{\left|\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-1\right|-1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{x-1}}-1}\geq 0$$

$$\text{I.E.}:\begin{cases}x-1\geq 0\\ \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{x-1}}-1\neq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \sqrt{x-1}\neq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq 1\end{cases}$$
$$\text{I.E.}: \mathrm{x}>1$$

Segno del numeratore:

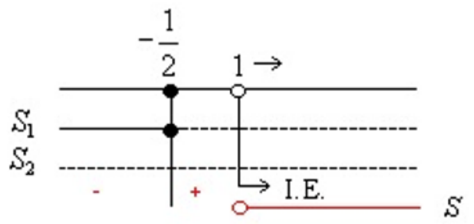
$$\left|\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-1\right|-1\geq 0\rightarrow\left|\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-1\right|\geq 1$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-1\geq 1\rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\geq 2\rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$
$$2x\leq -1\rightarrow x\leq -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 \le -1 \to \left(\frac{1}{4}\right)^x \le 0 \to \Phi$$
$$S_1 \equiv \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$$

Segno del denominatore:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{x-1}} - 1 > 0 \to \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{x-1}} > 1$$
$$\sqrt{x-1} < 0 \to S_2 \equiv \Phi.$$

Confrontando i segni del numeratore e del denominatore si ha:



$$\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x > 1 \text{ (I.E.)} \end{cases} \to S \equiv (1;+\infty)$$

2) caso a>1

Per quanto detto a livello di definizione relativo alla finzione esponenziale si ha:

$$a^{f_1(x)} {}^{\ge}_{<} a^{f_2(x)}$$

che implica:

$$\begin{cases} f_1(x) {}^{\ge}_{<} f_2(x) \\ I.E. \end{cases}$$

con I.E. insieme si esistenza della disequazione.

ESEMPIO

a) Risolvere la disequazione:

$$3^{5x-1} > \frac{1}{3}; \text{ I.E.: } \forall x \in R.$$
$$3^{5x-1} > 3^{-1} \to 5x - 1 > -1$$
$$5x > 0 \to x > 0$$
$$S\begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in R \end{cases} \quad S \equiv (0;+\infty)$$

b) Risolvere la disequazione:

$$\sqrt[x-1]{25} \le \frac{1}{125};\ \text{I.E.: x -1} \ne 0 \to \text{x} \ne 1.$$

$$(25)^{\frac{1}{x-1}} \le \frac{1}{125} \to (5)^{\frac{2}{x-1}} \le (5)^{-3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} \le -3 \\ x \ne 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{2+3x-3}{x-1} \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x-1} \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{3} \le x \le 1 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

$$S \equiv \left[\frac{1}{3};1\right]$$

c) Risolvere la disequazione:

$$e^{|x|-1} > e^{2x};\ \text{I.E.: } \forall \text{x} \in \text{R}.$$

$$\begin{cases} |x|-1 > 2x \\ \forall x \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x-1 > 2x \end{cases} \to \begin{cases} x \ge 0 \\ x < -1 \end{cases} \to S_1 \equiv \Phi$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x-1 > 2x \end{cases} \to \begin{cases} x < 0 \\ 3x < -1 \end{cases} \to \begin{cases} x < 0 \\ x < -\dfrac{1}{3} \end{cases} \to S_2 \equiv \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$$

$$S \equiv S_1 \cup S_2 \equiv \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$$

d) Risolvere la disequazione:

$$\frac{e^{\frac{1}{x-2}} - \sqrt{e}}{\sqrt{e^{x-1}-1}} < 0$$

$$\text{I.E.:} \begin{cases} x-2 \ne 0 \\ e^{x-1} - 1 \ne 0 \\ e^{x-1} - 1 \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \ne 2 \\ e^{x-1} > 1 \end{cases} \to \begin{cases} x \ne 2 \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ne 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\text{I.E.:} \equiv (1;2) \cup (2;+\infty).$$

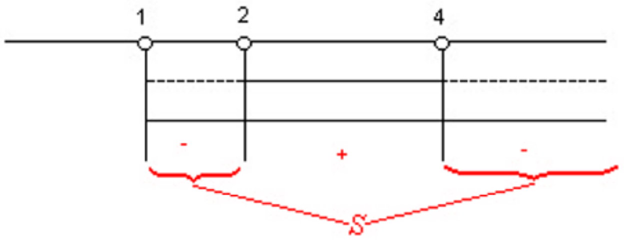
Si studia il segno del numeratore:

$$e^{\frac{1}{x-2}} - \sqrt{e} > 0 \rightarrow e^{\frac{1}{x-2}} > e^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{x-2} > \frac{1}{2}$$
$$\frac{2-x+2}{2(x-2)} > 0 \rightarrow \frac{4-x}{2(x-2)} > 0 \rightarrow 2 < x < 4$$

Per il denominatore si ha:

$\sqrt{e^{x-1} - 1} > 0 \rightarrow \forall x \in \text{I.E.}$

Quindi:



$S \equiv (1;2) \cup (4;+\infty)$

Anche per le disequazioni si considera il caso:

$$Aa^{2P_1(x)} + Ba^{P_1(x)} + C \gtrless 0$$

che possono essere ricondotte alla disequazione algebrica di 2° grado con la posizione:

$$y = a^{P_1(x)}$$

restando nel caso in cui

$$y_{1,2} = a^{P_{2,3}(x)}$$

ESEMPIO

a) Risolvere la disequazione:

$$9^x - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 \geq 0$$

Si può scrivere:

$$3^{2x} - \frac{10}{3} \cdot 3^x + 1 \geq 0$$
$$3^x = y$$

Si pone:

$$y^2-\frac{10}{3}y+1\geq 0 \rightarrow 3y^2-10y+3\geq 0$$
$$y\leq \frac{1}{3}\vee y\geq 3$$

Tornando alla posizione si ha:

$$3^x\leq \frac{1}{3}\vee 3^x\geq 3$$

da cui:

$$3^x\leq 3^{-1}\rightarrow x\leq -1 \quad . \quad 3^x\geq 3\rightarrow x\geq 1$$

Quindi la soluzione:

$$S\equiv(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$$

b) Risolvere la disequazione:

$$\frac{e^{2|x|}-e^x}{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x^2}}}\leq 0$$

$$\text{I.E.: } \begin{cases} x\neq 0 \\ e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x^2}}\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \frac{1}{x}\neq \frac{1}{x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$
$$\text{I.E.} \equiv \forall x\neq \{0\}\wedge\{1\}$$

Risoluzione:
segno numeratore:

$$e^{2|x|}-e^x\geq 0\rightarrow e^{2|x|}\geq e^x\rightarrow 2|x|\geq x\rightarrow \forall x$$

segno denominatore:

$$e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x^2}}>0$$

Si pone:

$$y=e^{\frac{1}{x}}$$

da cui:

$$y-y^2>0\rightarrow 0<y<1$$

Tornando alla posizione:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} < 1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{x} < 0 \rightarrow x < 0$$

Dal confronto del numeratore e denominatore si ha: $S \equiv (-\infty;0)$.