Disequazioni logaritmiche

DEFINIZIONE

Si dice disequazione logaritmica la disequazione in cui l'incognita è presente in argomento di logaritmi.
In simboli:

$$F[\log_{ai} P(x)] \gtrless 0 \quad ; \quad \text{con} \quad P(x) > 0$$

Si considera il caso elementare:

$$(\Delta) \qquad \log_a P_1(x) \gtrless \log_a P_2(x) \quad \text{con} \quad \begin{cases} P_1(x) > 0 \\ P_2(x) > 0 \end{cases}$$

Per quanto affermato sull'andamento della funzione logaritmica si ha:

1) se $0 < a < 1$ la (Δ) viene risolto per: $\begin{cases} P_1(x) \lesseqgtr P_2(x) \\ P_1(x) > 0 \\ P_2(x) > 0 \end{cases}$

2) se $a > 1$ la (Δ) viene risolto per: $\begin{cases} P_1(x) \gtrless P_2(x) \\ P_1(x) > 0 \\ P_2(x) > 0 \end{cases}$

ESEMPIO

a) Risolvere la disequazione:

$$\log_2(x+1) > \log_2(2x-1)$$

Si ha:

$$\begin{cases} x+1 > 2x-1 \\ x+1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$S \equiv \left(\frac{1}{2};2\right)$$

b) Risolvere la disequazione:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x) \le \log_{\frac{1}{2}} 3$$

Si ha:

$$\begin{cases} 5x \geq 3 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{5} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$S \equiv \left[\frac{3}{5};+\infty\right)$$

La funzione logaritmo permette di risolvere le disequazioni esponenziali con basi diverse, cioè del tipo:

$(\Delta\Delta)$ $$(A)^{P_1(x)} \gtrless (B)^{P_2(x)} \quad \text{con} \quad (A \wedge B) > 0$$

Infatti, applicando ad entrambi i membri la stessa funzione logaritmica (preferibilmente $\ln x$ o $Logx$) si ha:

$(\Delta\Delta)'$ $$\ln(A)^{P_1(x)} \gtrless \ln(B)^{P_2(x)}$$

da cui:

$$P_1(x)\ln(A) \gtrless P_2(x)\ln(B)$$

che fornisce la soluzione della $(\Delta\Delta)$.

ESEMPIO

Risolvere le disequazioni:

a) $$e^{x-1} \geq 2$$

Si ha:

$$(x-1)\ln e \geq \ln 2$$

da cui:

$$x-1 \geq \ln 2 \rightarrow x \geq 1+\ln 2$$
$$S \equiv [1+\ln 2;+\infty)$$

b) $$\left(\frac{1}{e}\right)^x \leq \sqrt[x]{2} \quad \text{con} \quad x \neq 0$$

$$x\ln\frac{1}{e} \leq \frac{1}{x}\ln 2$$
$$-x\ln e \leq \frac{1}{x}\ln 2 \rightarrow \frac{x^2\ln e + \ln 2}{x} \geq 0$$

Il numeratore è sempre positivo.
Quindi:

$$S \equiv (0;+\infty)$$

Si consideri infine la disequazione logaritmica del tipo:

(*) $$A\log_a^2 P(x) + B\log_a P(x) + C \gtrless 0$$

Con la posizione $y = \log_a P(x)$ si ottiene la disequazione algebrica:

$$Ay^2 + By + C \gtrless 0$$

Risalendo alla posizione si ottiene la soluzione della (*).

ESEMPIO

a) Risolvere la disequazione:

$$2\ln^2(x-1) - \ln(x-1) - 1 \ge 0$$
$$I.E.: x-1>0 \to x>1.$$

Si pone:

$$y = \ln(x-1)$$

da cui:

$$2y^2 - y - 1 \ge 0$$

La sua soluzione è:

$$y \le -\frac{1}{2} \vee y \ge 1$$

Tornando alla posizione si ha:

$$x-1 \le e^{-\frac{1}{2}} \to x \le 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$x-1 \ge e \to x \ge 1+e \to S \equiv (1;1+\frac{1}{\sqrt{e}}] \cup [1+e;+\infty)$$