Equazioni esponenziali

DEFINIZIONE

Una equazione è esponenziale se l'incognita figura ad esponente.
In simboli:

$$f[a_i^{P(x)}] = 0 \text{ con } i = 1,2,\dots,n$$
$$a_i > 0 \; ; \; x \in R$$

Dove $f[a_i^{P(x)}]$ esprime una generica funzione avente per argomento espressioni contenenti più funzioni esponenziali con basi anche differenti. In genere la risoluzione della $f[a_i^{P(x)}] = 0$ comporta non poche difficoltà e per alcune di esse non esiste un metodo algebrico diretto per la loro risoluzione.
Nel presente paragrafo ci interessiamo delle equazioni esponenziali elementari, cioè del tipo:

$$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$$

o riducibili ad esso.
Si presenta il metodo di risoluzione:

I) Insieme di esistenza

"Se (a) è funzione di x dovrà essere a(x) > 0. Inoltre si dovrà assicurare l'esistenza delle funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ ad esponente.
Quindi se X_1 e X_2 sono i domini rispettivamente di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ l'insieme di esistenza della

$$I.E. \begin{cases} X_1 \cap X_2 \\ a(x) > 0 \end{cases}$$

equazione è:

II) Risoluzione

Essendo uguali le basi dei due membri si ha:

$$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)} \rightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

Quindi l'equazione esponenziale si riduce alla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ I.E. \end{cases}$$

ESEMPIO

a) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$(2)^{3x-1} = (2)^{\frac{1}{x}}$$

1) I.E. $x \neq 0$
2) Risoluzione

$$\begin{cases} 3x - 1 = \frac{1}{x} \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{6} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Quindi l'equazione ammette soluzione:

$$S \equiv \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \vee \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right\}$$

b) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$\sqrt[x]{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$1) I.E. \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}; I.E. \equiv R - \{0;1\}$$

2) Risoluzione

$$\left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{x-1}} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-\frac{2}{x-1}}$$

$$\begin{cases} I.E. \\ \frac{1}{x} = -\frac{2}{x-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1 + 2x = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

la soluzione è:

$$S \equiv \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

c) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$\left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{x-1}} = (9)^x$$

1) I.E x - 1 ≥ 0 → x ≥ 1.
2) Risoluzione

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=-2x\\ x\geq 1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=-2x\\ x\leq 0\\ x\geq 1\end{cases}\quad\text{(concordanza)}$$

Essendo il sistema incompatibile, l'equazione non ammette soluzione.

$$S\equiv\{\Phi\}$$

d) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$e^{\frac{x}{x^2-1}}=1$$

1) I.E. x^2 - 1 ≠ 0 → x ≠ ± 1
2) Risoluzione

$$e^{\frac{x}{x^2-1}}=e^0\rightarrow\frac{x}{x^2-1}=0\rightarrow x=0$$

La soluzione è:

$$S\equiv\{0\}$$

e) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x-1}=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{|2x|-x}$$

Essendo le basi variabili, l'insieme di esistenza è dato da:

$$\frac{x-1}{x}>0\rightarrow x<0\vee x>1$$

Risoluzione:

$$S\begin{cases}x-1=|2x|-x\\ x<0\vee x>1\end{cases}$$

Il sistema S si spezza nei sistemi:

$$S_1\begin{cases} x-1=2x-x \\ x>0 \\ x<0 \vee x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1=0 \\ x>0 \\ x<0 \vee x>1 \end{cases} \quad S_1 \equiv \Phi$$

$$S_2\begin{cases} x-1=-2x-x \\ x<0 \\ x<0 \vee x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ x<0 \\ x<0 \vee x>1 \end{cases} \quad S_2 \equiv \Phi$$

L'equazione non ammette soluzioni:

$$S \equiv \{\Phi\}$$

f)Risolvere l'equazione esponenziale:

$$(|x|-1)^{\sqrt{x}-1} = (|x|-1)^x$$

$$1) I.E. \begin{cases} |x|-1>0 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x>1$$

2)Risoluzione

$$\begin{cases} \sqrt{x}-1=x \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=x+1 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=(x+1)^2 \\ x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x>1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$S \equiv \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Sono di particolare interesse le equazioni esponenziali del tipo:

(1) $Aa^{2P_1(x)} + BAa^{P_1(x)} + c = 0; \quad a > 0 \quad e \quad P_1(x)$ polinomio reale.

Essendo la posizione $y = a^{P1(x)}$ si ottiene l'equazione algebrica di secondo grado:

(2) $Ay^2 + By + C = 0$

Si limita il caso in cui:

$$Y_{1,2} = a^{P_{2,3}(x)}$$

Infatti, in tal caso, tornando alla posizione si ha:

$$a^{P_1(x)} = a^{P_2(x)}$$

da cui:

$$P_1(x) = P_2(x)$$

$$a^{P_1(x)} = a^{P_3(x)}$$

da cui:

$$P_1(x)= P_3(x)$$

ESEMPIO

a) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$4^x - 3(2)^x + 2 = 0$$

Si ha:

$$(2)^{2x} - 3(2)^x + 2 = 0$$

Si pone:

$$2^x = y$$

da cui:

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$y_1 = 1 \quad ; y_2 = 2$$

Dalla posizione si ricava:

$$2^x = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x_1 = 0$$
$$2^x = 2 \rightarrow x_2 = 1$$

Soluzione:

$$S \equiv \{0;1\}$$

b) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$e^{2(x+1)} + (e^2 - e)e^{x+1} - e^3 = 0$$

Si pone:

$$y = e^{x+1}$$

Scende:

$$y^2 + (e^2 - e)y - e^3 = 0 \quad ; y_1 = -e^2 \quad y_2 = e$$

Tornando alla posizione:

$$e^{x+1} = -e^2$$

Impossibile essendo una esponenziale sempre positiva.

$$x_1 = \Phi$$
$$e^{x+1} = e \rightarrow x + 1 = 1 \rightarrow x_2 = 0$$
$$S \equiv \{0\}$$

Le equazioni esponenziali con basi diverse verranno riprese nel paragrafo dedicato ai logaritmi.