Equazioni logaritmiche

DEFENIZIONE

Si dice equazione logaritmica l'equazione nella quale l'incognita figura in argomento del logaritmo.
In generale si scrive:

$$f(\log_{ai} P(x)) = 0 \quad ; \quad \text{con} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Dove $f(\log_{ai} P(x))$ esprime espressioni contenenti logaritmi con basi anche diverse.
In genere la risoluzione di un'equazione logaritmica comporta notevoli difficoltà.
Si limita la trattazione a quelle di tipo elementare. Per la risoluzione è indispensabile determinare inizialmente l'insieme di esistenza I.E. dell'equazione. Per cui si ha:

$$\begin{cases} f(\log_{ai} P(x)) = 0 \\ I.E. \end{cases}$$

Se l'equazione è del tipo:

$$\log_a P_1(x) = \log_a P_2(x)$$

si ha:

$$\begin{cases} P_1(x) = P_2(x) \\ P_1(x) > 0 \\ P_2(x) > 0 \\ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO

a) Risolvere l'equazione:

$$\log_2(x-1) = \log_2 5x$$

$$\text{I.E.:} \begin{cases} x-1>0 \\ 5x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow x>1$$

Si ha:

$$\begin{cases} x-1 = 5x \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ x>1 \end{cases} \rightarrow S \equiv \Phi$$

b) Risolvere l'equazione:

$$\log_{\frac{1}{2}}(4-x) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 0 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(4-x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\text{I.E.}:\begin{cases}4-x>0\\x-1>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<4\\x>1\end{cases}\rightarrow 1<x<4$$

Si ha:

$$\begin{cases}4-x=x-1\\1<x<4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x=5\\1<x<4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\1<x<4\end{cases}$$

$$S\equiv\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

c) Risolvere l'equazione:

$$\ln(x^2-1)=1$$
$$\text{I.E.}:x^2-1>0\rightarrow x<-1\vee x>1$$

$$\begin{cases}\ln(x^2-1)=1\\x<-1\vee x>1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2-1=e\\x<-1\vee x>1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\mp\sqrt{e+1}\\x<-1\vee x>1\end{cases}$$
$$S\equiv\left\{-\sqrt{e+1};+\sqrt{e+1}\right\}$$

Nel caso in cui l'equazione logaritmica sia del tipo:

$$\log_{a1}P_1(x)=\log_{a2}P_2(x)\quad\text{con}\quad(a_1\wedge a_2)>1\quad\text{o}\quad 0<(a_1\wedge a_2)<1$$

La soluzione si ottiene da:

$$\begin{cases}P_1(x)=1\\P_2(x)=1\end{cases}$$

ESEMPIO

a) Risolvere l'equazione:

$$\log_2(2x-1)=\log_3 x^2$$

Si ha:

$$\begin{cases}2x-1=1\\x^2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x=2\\x=\mp1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=1\\x=\mp1\end{cases}$$
$$S\equiv\{1\}$$

Se l'equazione logaritmica è espressa dalla somma di più logaritmi ricondotti a base uguale, essa viene risolta applicando le proprietà fondamentali.

Si riportano i casi:

1) $\sum_i \log_a P_i(x) = 0 \quad (\sum_i \quad \text{sommatoria})$

Si ha:

$$\log_a \prod_i P_i(x) = 0 \quad (\prod_i \quad \text{prodotto})$$

da cui:

$$\begin{cases} \prod_i P_i(x) = 1 \\ I.E. \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolvere l'equazione:

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 0$$

$$I.E. \begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-1 \end{cases} \rightarrow x>1$$

$$\begin{cases} \log_2(x-1)\cdot(x+1) = 0 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(x+1) = 1 \\ x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1=1 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ x>1 \end{cases}$$

$$S \equiv \{\sqrt{2}\}$$

2) $\sum_i \log_a P_i(x) = N$

Si ha: $\log_a \prod_i P_i(x) = N$

da cui:

$$\begin{cases} \prod_i P_i(x) = a^N \\ I.E. \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolvere l'equazione:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 1$$

$$I.E. \begin{cases} x-2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow x>2$$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2)\cdot(x-1)=1 \\ x>2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-2)\cdot(x-1)=\frac{1}{2} \\ x>2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2=\frac{1}{2} \\ x>2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\frac{3\mp\sqrt{3}}{2} \\ x>2 \end{cases}$$

$$S\equiv\left\{\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right\}$$

3) $\log_a P_1(x)-\log_a P_2(x)=N$

Si ha:

$$\log_a \frac{P_1(x)}{P_2(x)}=N$$

cioè:

$$\begin{cases} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}=(a)^N \\ I.E. \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolvere l'equazione:

$$\log_3(x-1)-\log_3(x)=2$$

$$I.E.\begin{cases} x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow x>1$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x}=(3)^2 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-1-9x}{x}=0 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8x=1 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{8} \\ x>1 \end{cases}$$

$$S\equiv\Phi$$

4) $\log_a \sqrt[n]{(P(x))^m}=N$

Si ha:

$$\frac{m}{n}\log_a P(x)=N$$

da cui:

$$\log_a P(x) = N \cdot \frac{n}{m}$$

Quindi:

$$\begin{cases} P(x) = a^{N \cdot \frac{n}{m}} \\ P(x) > 0 \end{cases}$$

Rientra come caso particolare l'equazione:

$$\log_a [P(x)]^M = N$$

ESEMPIO

a) Risolvere l'equazione:

$$Log(x-5)^3 = -2$$

$$I.E.: x-5 > 0 \rightarrow x > 5$$

$$\begin{cases} 3Log(x-5) = -2 \\ x > 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Log(x-5) = -\frac{2}{3} \\ x > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5 = (10)^{-\frac{2}{3}} \\ x > 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = (10)^{-\frac{2}{3}} + 5 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$S \equiv \left\{ 5 + \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \right\}$$

5) $$\log_a P_1(x) + \log_a P_2(x) = N \log_a P_3(x)$$

Si ha:

$$\log_a P_1(x) \cdot P_2(x) = \log_a [P_3(x)]^N$$

Quindi:

$$\begin{cases} P_1(x)\cdot P_2(x) = [P_3(x)]^N \\ P_1(x) > 0 \\ P_2(x) > 0 \\ P_3(x) > 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolvere l'equazione: $\log_2(5+x) + \log_2 x = 2\log_2(x+2)$

Si ha:

$$I.E.: \begin{cases} 5+x>0 \\ x>10 \\ x+2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x>0 \\ x>-2 \end{cases} \rightarrow x>0$$

$$\begin{cases} \log_2 x(5+x) = \log_2(x+2)^2 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(5+x) = (x+2)^2 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+5x = x^2+4x+4 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x>0 \end{cases}; \quad \mathrm{S} \equiv \{4\}$$

6) $\log_{P_1(x)} P_2(x) = N$

Per definizione di logaritmo si ha:

$$\begin{cases} [P_1(x)]^N = P_2(x) \\ P_2(x) > 0 \\ P_1(x) > 0 \wedge P_1(x) \neq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolvere l'equazione: $\log_{2x}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -1$

Si ha:

$$\begin{cases} (2x)^{-1} = x - \frac{1}{3} \\ x - \frac{1}{3} > 0 \\ 2x > 0 \wedge 2x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2x} = x - \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3} \\ x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x > \frac{1}{3} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{9}}{6} \\ x > \frac{1}{3} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S \equiv \left\{ \frac{1 + \sqrt{19}}{6} \right\}$$

I logaritmi permettono di risolvere l'equazione esponenziale con basi diverse, cioè del tipo:

(1) $$(A)^{P_1(x)} = (B)^{P_2(x)} \quad \text{con} \quad (A \wedge B) > 0$$

Infatti applicando la funzione logaritmica da entrambi i membri della (1) si ha:

$$\log_a (A)^{P_1(x)} = \log_a (B)^{P_2(x)}$$

da cui:

$$P_1(x) \log_a (A) = P_2(x) \log_a (B)$$

In genere si sceglie "$a = e$" oppure "$a = 10$".

ESEMPIO

Risolvere l'equazione esponenziale:

a) $$3^{x-1} = 2^{x+1}$$

$$\begin{aligned} &(x-1)\ln 3 = (x+1)\ln 2 \\ &x\ln 3 - \ln 3 = x\ln 2 + \ln 2 \\ &x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3 + \ln 2 \\ &x = \frac{\ln 3 + \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{\ln 6}{\ln \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Risolvere l'equazione esponenziale:

b) $$e^{\frac{x-1}{x}} = 2$$

$$\frac{x-1}{x} \ln e = \ln 2 \quad \text{con} \quad x \neq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x} = \ln 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x-1 = x\ln 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x(1-\ln 2) = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{1-\ln 2} \to S \equiv \left\{ \frac{1}{1-\ln 2} \right\}$$

c) Risolvere l'equazione esponenziale:

$$4^x - 8 \cdot 2^x + 15 = 0$$

$$(2)^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \quad \to \quad 2^x = 3 \quad ; \quad 2^x = 5$$

$$x\ln 2 = \ln 3 \to x_1 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$x\ln 2 = \ln 5 \to x_2 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

Si consideri l'equazione logaritmica del tipo:

(Δ) $\qquad A\log_a^2 P(x) + B\log_a P(x) + C = 0 \quad ; \quad \text{con} \quad \mathrm{P(x)} > 0$

Per mezzo della posizione $y = \log_a P(x)$ si ottiene l'equazione algebrica di 2º grado:

$$Ay^2 + By + C = 0$$

Se $\Delta \geq 0$ si ha:

$$y_{1,2} = \frac{-B \mp \sqrt{\Delta}}{2A}$$

Tornando alla posizione:

$$\log_a P(x) = \frac{-B \mp \sqrt{\Delta}}{2A} \to P(x) = (a)^{\frac{-B \mp \sqrt{\Delta}}{2A}}$$

che fornisce la soluzione della (Δ).

ESEMPIO

Risolvere l'equazione:

$$2\ln^2(x-1) - \ln(x-1) - 1 = 0 \quad ; \quad \text{I.E.: } x-1 > 0 \to x > 1$$

Ponendo $y = \ln(x-1)$ si ha:

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

da cui:

$$y_1 = -\frac{1}{2} \ ; \ y_2 = 1$$

Tornando alla posizione si ha:

$$\ln(x-1) = -\frac{1}{2} \to x-1 = e^{-\frac{1}{2}} \to x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$\ln(x-1) = 1 \to x-1 = e \to x_2 = 1+e$$
$$S \equiv \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{e}}; 1+e\right\}$$