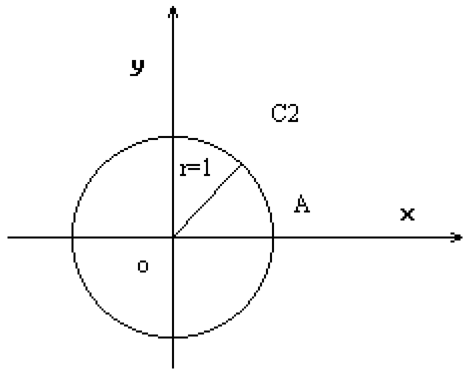
Il cerchio goniometrico

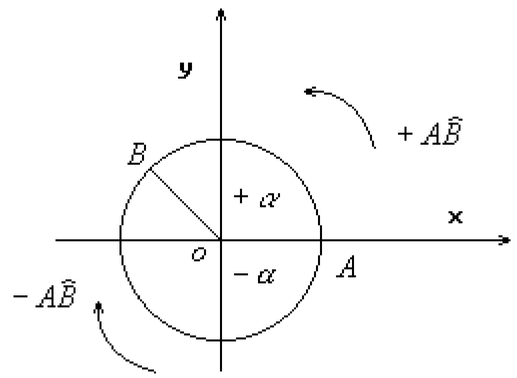
Sia $S \equiv [0; x, y]$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Si dà la

DEFINIZIONE

Si dice cerchio o circonferenza goniometrica la circonferenza C_2 di centro 0 e di raggio $r = 1$ (unità di misura).

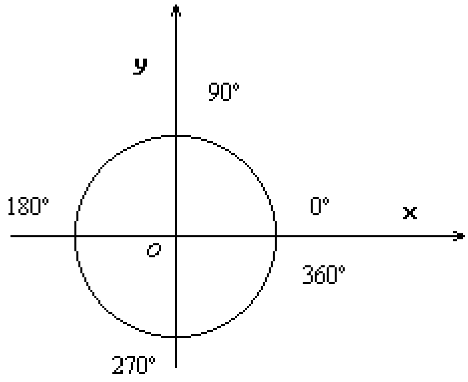


Sia A il punto di intersezione della C_2 con il semiasse positivo delle ascisse. Quindi $A \equiv (1;0)$. La semiretta orientata $\overline{OX}$ viene assunta come lato origine degli angoli orientati in senso antiorario di vertice 0. Il punto $A \equiv (1;0)$ viene assunto come origine degli archi della circonferenza goniometrica. Gli archi $A\widehat{B}$ della circonferenza goniometrica di primo estremo A sono detti archi orientati. Se l'arco AB viene percorso in senso antiorario esso è orientato positivo, se è percorso in senso orario esso è orientato negativo. Se non viene specificato, un arco è considerato orientato positivo. Il verso di rotazione degli archi orientati è concorde con quello degli angoli corrispondenti.

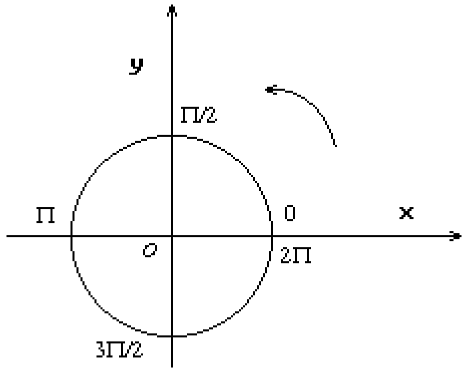


Quindi all'arco orientato $A\widehat{B}$ corrispondente l'angolo orientato α che lo sottende dall'origine O. Quindi: $\alpha \to A\widehat{B}$.
Ad ogni positivi corrispondono archi positivi e ad angoli negativi corrispondono archi negativi. Il cerchio goniometrico risulta graduato in relazione al sistema di misura degli angoli. Si ha:

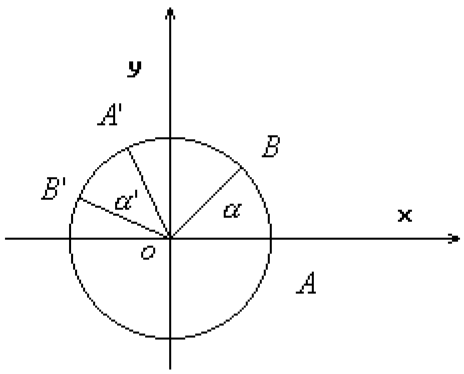
CERCHIO GRADUATO SESSAGESIMALE



CERCHIO GRADUATO RADIANTE



Si può concludere affermando che:
il cerchio goniometrico è un modello che permette di esprimere archi ed angoli orientati. Inoltre esso associa l'insieme $\hat{A}$ degli angoli orientati con l'insieme I_p dei punti nella loro espressione cartesiana reale.
Se non viene ulteriormente specificato nel seguito sia gli angoli che gli archi sono ritenuti orientati e riferiti al cerchio goniometrico.
La trigonometria si interessa di angoli e archi orientati. Se un angolo od arco non sono orientati è quindi necessario renderli tali facendo coincidere il primo lato e il primo estremo rispettivamente con la semiretta $\overline{OX}$ o con il punto $A \equiv (1;0)$.



$\left.\begin{matrix} A\hat{B} \\ \alpha \end{matrix}\right\}$ ORIENTATI

$\left.\begin{matrix} A'\hat{B}' \\ \alpha' \end{matrix}\right\}$ NON ORIENTATI

Funzioni trigonometriche elementari: sen x; cos x (equazioni e disequazioni elementari)

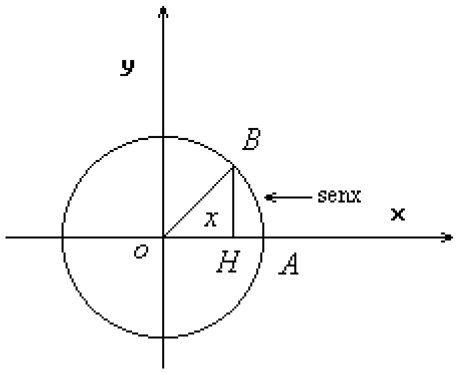
In trigonometria sono dette funzioni trigonometriche elementari le funzioni:

$y = sen\, x$ (seno di x) e $y = cos\, x$ (coseno di x)

Si ritiene utile al fine di un'economia didattica e concettuale passare alla loro definizione (con relative proprietà) fornendo direttamente il concetto di equazione e disequazione trigonometrica elementare compresa la loro risoluzione.

La funzione: ***y = sen x.***
DEFINIZIONE

Si dice funzione seno di un angolo nel cerchio goniometrico, la misura dell'ordinata del secondo estremo dell'arco orientato sotteso dal suddetto angolo. Si scrive: $y = sen\, x$ oppure $y = sin\, x$.



Andamento della funzione: y = sen x.
Si vuole stabilire dei valori reali assunti dalla $y = sen\, x$ considerando $x \in [0;2\pi]$, cioè definendo la funzione nel 1° giro del cerchio trigonometrico. Per i valori degli angoli che limitano i quattro quadranti si ha:

$$sen(0) = 0$$

Il secondo estremo B dell'arco sotteso da x = 0 coincide con l'origine degli archi A. Quindi $y_B = 0$.

$$sen\frac{\pi}{2} = 1$$

Il secondo estremo B dell'arco sotteso da $x = \frac{\pi}{2}$ è il punto $B \equiv (0;1)$. Quindi $y_B = 1$.

$$sen\pi = 0$$

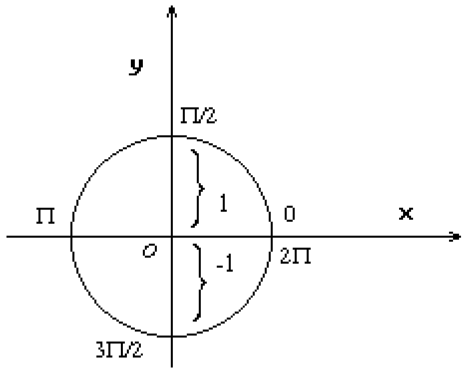
Il secondo estremo B dell'arco sotteso da $x = \pi$ è il punto $B \equiv (-1;0)$. Quindi $y_B = 0$.

$$sen\frac{3\pi}{2} = -1$$

Il secondo estremo B dell'arco sotteso da $x = \frac{3\pi}{2}$ è il punto $B \equiv (0;-1)$. Quindi $y_B = -1$.

$$sen2\pi = 0$$

Il secondo estremo B dell'arco sotteso da $x = 2\pi$ è il punto $A \equiv B \equiv (-1;0)$. Quindi $y_B = 0$.



I segni assunti dalla y = sen x coincidono con quelli assunti dalle ordinate dei punti nei quattro quadranti di $S \equiv [0; x, y]$.
Si ha:

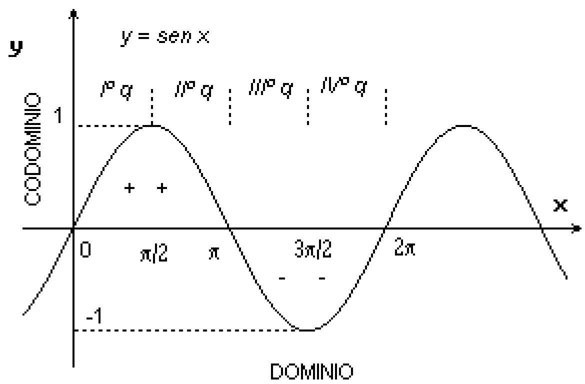
se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sen x > 0 I quadrante

se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ sen x > 0 II quadrante

se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ sen x < 0 III quadrante

se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ sen x < 0 IV quadrante

Al fine di stabilire l'andamento della y = sen x per $x \in [0;2\pi]$ consideriamone l'interpretazione grafica che conduca al grafico di tale funzione detto sinusoide.



Dall'andamento della sinusoide scende:

1) y = sen x è una funzione suriettiva.
2) per $0 < x < \frac{\pi}{2} \wedge \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ la y = sen x è crescente.
3) per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ la y = sen x è decrescente.

Riassumendo quanto detto si ha:

	I		II		III		IV		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sen x	+	crescente	+	decrescente	-	decrescente	-	crescente	0	1	0	-1	0

Quindi:

$$senx:\{0 \le x \le 2\pi\} \rightarrow [-1 \le x \le 1]$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

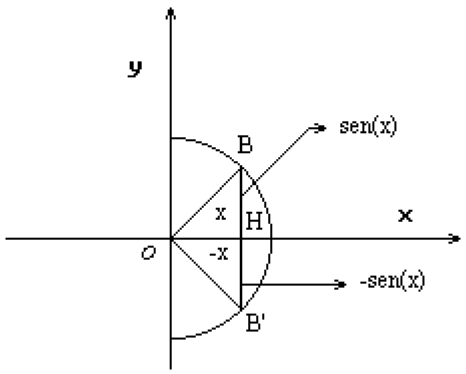
Dominio Codominio

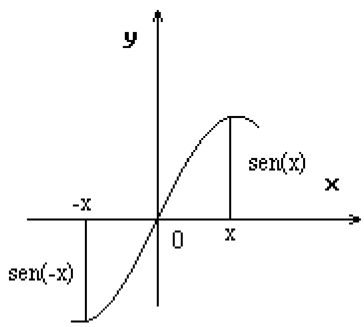
Il seno di angoli notevoli

Dalla definizione di y = sen x e utilizzando le definizioni di geometria elementare il lettore può verificare che

$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La finzione sen x è dispari : *f(x) = -f(x)*.
Dal cerchio trigonometrico e dalla sinusoide si deduce che sen(x) = - sen(x)





Quindi: sen(-x)=-sen(x). La funzione è quindi dispari o simmetrica rispetto all'origine.

Periodo

Si noti che sommando algebricamente all'angolo x l'angolo giro (360º $\vee 2\pi$) il valore della y = sen x resta invariato. Si ha: sen (x + 2π) = sen x.
L'angolo T = 2π è detto periodo fondamentale (periodo) di y = sen x.
Si noti inoltre che: se sen(x + $2k\pi$) = sen x con $k \in Z$.
T = $2k\pi$ è detto periodo multiplo.
Quindi y = sen x è una funzione periodica con T = 2π .