La funzione esponenziale

DEFINIZIONE

Si dice funzione esponenziale a base reale l'operatore espresso dalla seguente legge:

$$f : y = a^x \text{ con } a \in R^+ \ x \in R.$$

"a" è detta base, x è detto esponente.
Se a = 0 la funzione non risulta definita per x = 0.
Infatti in tal caso si ha: $y = (0)^0$ che non ha significato numerico.
Per a = 1 la funzione si riduce a :

$$y = (1)^x = 1 \text{ per } \forall\ x \in R.$$

Cioè alla funzione costante (suriettiva).
Esclusi tali casi, detti banali, consideriamo il comportamento di a^x per a > 0.
Innanzitutto si nota che $a^x > 0$ per $\forall \in R$.
Infatti essendo "a" positiva, qualsiasi valore della x rende la scrittura a^x positiva.
Quindi il condominio di $y = a^x$ è $Y \equiv R^+$, cioè coincide con i valori y > 0.

Caso della base: 0 < a < 1

Si consideri l'esponenziale:

$$y = a^x \quad x \in R$$

con 0 < a < 1.
In tal modo, se $x_i > x_k$, si ha:

$$a^{x_i} < a^{x_k} \text{ per } \forall (x_i \wedge x_k) \in R.$$

Si procede con esempio:

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)$$

Si ha:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Si assegni:

$$x_1 = -4 \ ; \ x_2 = 2 \ .$$

In corrispondenza si ha:

$$y(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16; y(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 0.25$$

Quindi:

$$2 > (-4) \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

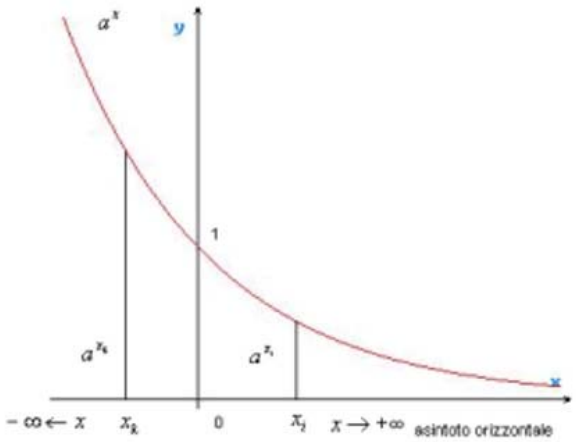
Inoltre:

1) se $x \rightarrow -\infty$, la $a^x \rightarrow +\infty$;
cioè per valori negativi della x sempre più grandi in modulo la funzione assume valori sempre più grandi e positivi.
2) se $x \rightarrow +\infty$, la $a^x \rightarrow 0^+$;
cioè per valori positivi della x e sempre più grandi la funzione assume valori sempre più prossimi allo zero per valori positivi.

Dai punti 1) e 2) si deducono le proprietà della $y = a^x$ con $0 < a < 1$.

A) La funzione è decrescente.
B) La funzione ha comportamento asintotico rispetto all'asse delle x. Si dice che l'asse delle x è asintoto orizzontale per la funzione.

Utilizzando il modello cartesiano ortogonale si ha:



Dalle considerazioni scende:
se:

$$a^{f_1(x)} \gtrless a^{f_2(x)}; \quad \text{con } 0 < a < 1,$$

allora

$$f_1(x) \lessgtr f_2(x)$$

con $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni arbitrarie.
Tale osservazione risulterà utile nella risoluzione delle equazioni e disequazioni esponenziali.

Caso della base: a > 1

Si consideri l'esponenziale:

$$y = a^x \text{ con } a > 1$$

In tal caso, se $x_i > x_k$, si ha:

$$a^{x_i} > a^{x_k} \text{ per } \forall(x_i \text{ e } x_k) \in R.$$

Si procede con un esempio :

$$a = 2$$

Si ha:

$$y = 2^x$$

Si assegni:

$$x = -4 \text{ e } x = 2 .$$

In corrispondenza si ha:

$$y(-4) = (2)^{-4} = 0.0625$$
$$y(2) = 2^2 = 4$$

Quindi:

$$2 > 4 \rightarrow (2)^2 > (2)^{-4} .$$

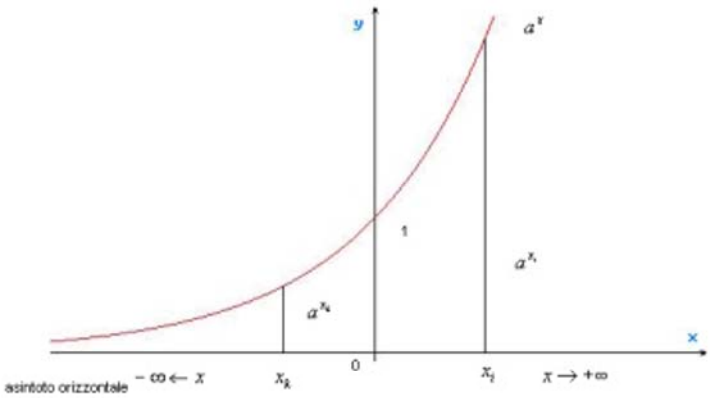
Inoltre:

1) se $x \rightarrow -\infty$, la $a^x \rightarrow 0^+$,
cioè per valori negativi della x sempre più grandi in modulo la funzione assume valori sempre più prossimi allo zero per valori positivi.
2) se $x \rightarrow +\infty$, la $a^x \rightarrow +\infty$,
cioè per valori positivi della x e sempre più grandi anche la funzione assume valori sempre più grandi.

Dai punti 1) e 2) si deducono le proprietà della $y = a^x$ con $a > 1$:

A) la funzione è crescente.
B) La funzione ha comportamento asintotico rispetto all'asse della x.

Usando il modello cartesiano ortogonale si ha la funzione:



Tra le funzioni di questo tipo è particolarmente utilizzata la $y = e^x$ con e = 2,718281… (**numero di Nepero**).
Dalle considerazioni scende: se

$$a^{f_1(x)} \gtrless a^{f_2(x)}; \quad \text{con } a > 1,$$

allora:

$$f_1(x) \gtrless f_2(x).$$

Con $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funzioni arbitrarie. Tale osservazione risulterà utile nella risoluzione delle equazioni e disequazioni esponenziali.

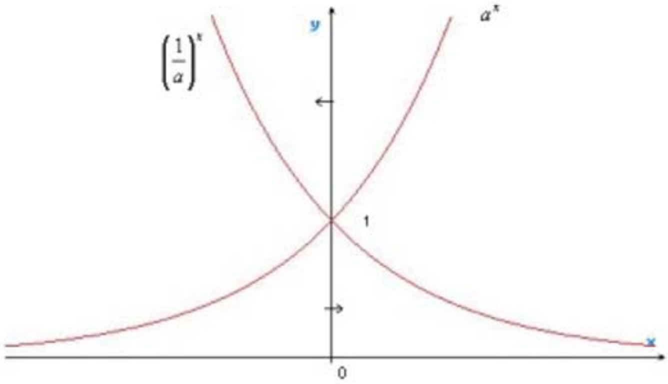
A conclusione del paragrafo si fa notare che se "l_1" è il grafico di $y = a^x$ con $a > 1$ e "l_2" è il grafico di:

$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x,$$

"l_2" si ottiene da "1_1" tramite simmetrizzazione di "l_1" rispetto all'asse y.
Infatti si noti che:

$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = (a)^{-x}.$$

Graficamente si ha:


$\left(\frac{1}{a}\right)^x$
y
a^x
1
x
0