La funzione logaritmo

DEFINIZIONE

Si dice funzione logaritmo in base ($a > 0 \wedge a \neq 1$) di argomento $x > 0$, il valore y che deve essere fornito come esponente alla base per ottenere l'argomento x.
In simboli:

$$y = \log_a x \begin{cases} \text{con } x \in R^+ \\ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{cases} \quad f(x): R^+ \to R$$

Dalla definizione si ha:

$$a^y = x$$

ESEMPIO

a)

$$\log_2 8 = 3 \to 2^3 = 8$$

b)

$$\log_5 25 = 2 \to 5^2 = 25$$

c)

$$\log_{0,1} 10 = -1 \to \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$$

d)

$$\log_2 x = 4 \to x = 2^4 = 16$$

e)

$$\log_3(x-1) = 1; \quad x-1 = 3; \quad x = 4$$

In particolare valgono le uguaglianze:

$$\log_a a = 1 \quad ; \quad \log_a 1 = 0 \to a^0 = 1 \quad \text{con } a \neq 0$$

Dalla definizione di logaritmo scende che essa è la **funzione inversa della funzione esponenziale** con $a \neq 1$. Infatti si consideri la funzione esponenziale :

$$y = a^x \quad \text{con} \quad a > 0$$

con dominio $X \equiv R$ e condominio $Y \equiv R^+$.
La sua inversa è:

$$x=a^y$$

con dominio $X \equiv R^+$ e condominio $Y \equiv R$.

Ricavando y si ha:

$$y = \log_a x$$

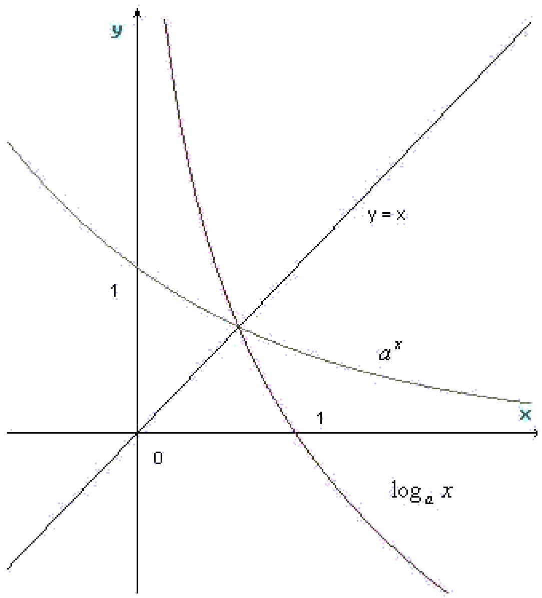
Quindi:

$$(a^x)^{-1} = \log_a x \quad \text{e} \quad (\log_a x)^{-1} = a^x.$$

Come visto per l'esponenziale, anche per la funzione logaritmo si devono distinguere due casi:

1) $0 < a < 1$

Il grafico di $y = \log_a x$ per $0 < a < 1$ si ottiene dal simmetrico di $y = a^x$ rispetto alla retta $y = x$.
Si ha:



Si noti che essendo la a^x decrescente, lo è anche $y = \log_a x$.
Inoltre:

$\log_a x > 0$	se	$0 < x < 1$
$\log_a x < 0$	se	$x > 1$
$\log_a x = 0$	se	$x = 1$

La funzione ha andamento asintotico rispetto all'asse y.
Quindi per valori di x positivi sempre più prossimi allo zero, la $\log_a x$ tende ad assumere valori sempre più grandi e positivi.

$$x \to 0^+ \Rightarrow \log_a x \to +\infty$$