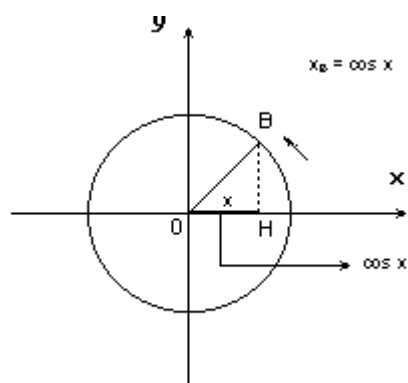


La funzione: $y = \cos x$

DEFINIZIONE

Si dice funzione coseno di un angolo nel cerchio trigonometrico, la misura dell'ascissa del secondo estremo dell'arco orientato sotteso dal suddetto angolo. Si scrive:

$$y = \cos x.$$



Andamento della funzione: $y = \cos x$

Come visto per la $y = \sin x$ si considera l'andamento della $y = \cos x$ per $x \in [0; 2\pi]$.

Si ha:

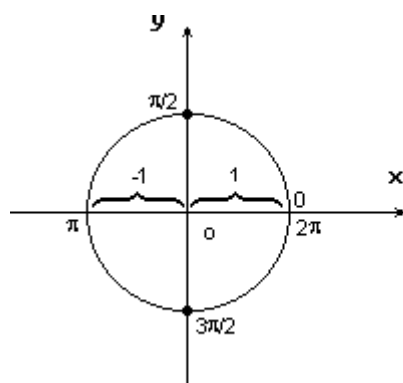
$$\cos(0) = 1 \rightarrow B \equiv (1; 0) \rightarrow x_B = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow B \equiv (0; 1) \rightarrow x_B = 0$$

$$\cos(\pi) = -1 \rightarrow B \equiv (-1; 0) \rightarrow x_B = -1$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \rightarrow B \equiv (0; -1) \rightarrow x_B = 0$$

$$\cos(2\pi) = 1 \rightarrow A \equiv B \equiv (1; 0) \rightarrow x_B = 1$$

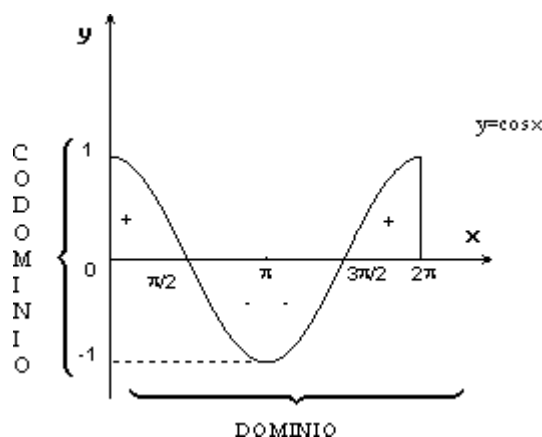


I segni della $y = \cos x$ coincidono con quelli delle ascisse dei punti nei quattro quadranti.

Si ha:

- se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\cos x > 0$ I quadrante
- se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $\cos x < 0$ II quadrante
- se $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ $\cos x < 0$ III quadrante
- se $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ $\cos x > 0$ IV quadrante

L'andamento della $y = \cos x$ per $x \in [0; 2\pi]$ si ottiene analizzando il grafico detto cosinusoide.
Dall'andamento della cosinusoide scende:



- 1) $y = \cos x$ è una funzione suriettiva.
- 2) per $0 < x < \pi$ la $y = \cos x$ è decrescente.
- 3) per $\pi < x < 2\pi$ la $y = \cos x$ è crescente.

Riassumendo quanto detto si ha:

	I		II		III		IV		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Cos x	+	decrescente	-	decrescente	-	crescente	+	crescente	1	0	-1	0	1

Quindi: $y = \cos x$

DOMINIO : $x \in [0; 2\pi]$

CODOMINIO : $[-1; 1]$

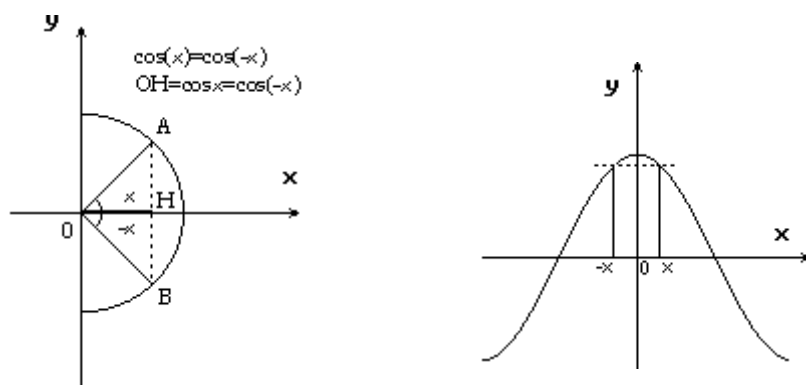
Utilizzando la definizione di $y = \cos x$ ed applicando gli elementi di geometria elementare il lettore può verificare che

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La funzione $y = \cos x$ è pari: $f(x) = f(-x)$

Dal cerchio trigonometrico e dal grafico della sinusoide scende che:

$$\cos x = \cos(-x)$$



Periodo

Come visto per la funzione $y = \sin x$ si ha:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x; \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$T = 2\pi$ periodo fondamentale (periodo).

$T = 2k\pi$ periodo multiplo.

Quindi anche la $y = \cos x$ è periodica con $T = 2\pi$.

Equazione elementare in $\cos x$

DEFINIZIONE

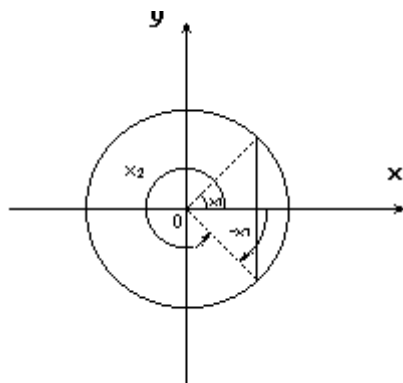
Si dice equazione elementare in $\cos x$ la scrittura:

$$\cos x = l \quad \text{con } -1 \leq l \leq 1.$$

Come per l'equazione $\sin x = l$, anche in questo caso si parla di soluzione fondamentale se $x \in [0; 2\pi]$, e generale se $x \in \hat{A}$.

Per la risoluzione si ha:

Considerando il cerchio goniometrico:



Si ha: $\cos x = 1 \rightarrow x = x_1 \wedge x = -x_1$

La $x = x_1$ può essere scritta nella forma $x = 2\pi - x_1$.

Ricordando che $y = \cos x$ ha periodo $T = 2\pi$, la soluzione generale della equazione è:

$$X \equiv \begin{cases} x = x_1 + 2\pi k \\ x = -x_1 + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in Z$$

per $k = 0$ si ha la soluzione fondamentale

$$\begin{array}{l} x = x_1 \qquad x = x_1 \\ \text{oppure} \\ x = -x_1 \qquad x = 2\pi - x_1 \end{array}$$

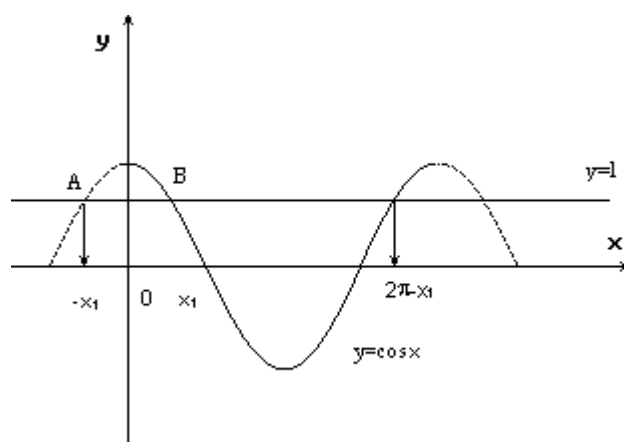
La soluzione x_1 può essere posta nella forma: $x_1 = \arccos(l)$ (l'arco il cui seno è l).

Interpretazione grafica

Graficamente l'equazione: $\cos x = l$ con $-1 \leq l \leq 1$ può essere vista come soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = l \end{cases}$$

La soluzione è espressa dalle ascisse dei punti comuni alla cosinusoide e alla retta $y = l$.
Si ha:



ESEMPIO

Risolvere l'equazione: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; si ha:

$$X \equiv \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in Z$$

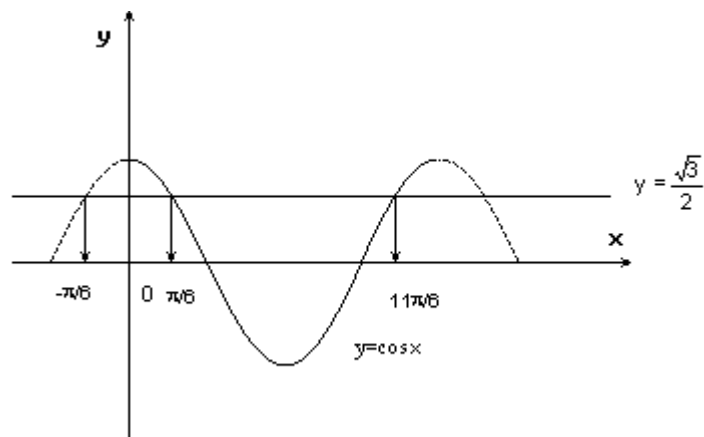
Per $k = 0$ si ha la soluzione minima:

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad x = \frac{\pi}{6}$$

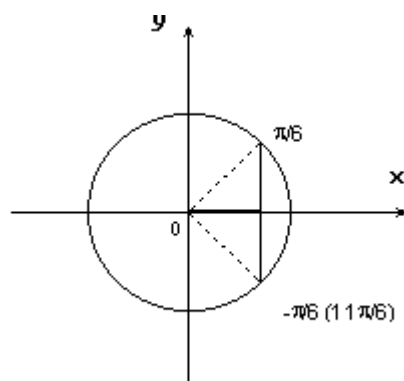
oppure

$$x = -\frac{\pi}{6} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

Graficamente:



Sul cerchio:



In particolare le equazioni: $\cos x = 0$; $\cos x = 1$; $\cos x = -1$ hanno rispettivamente soluzione:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = 2k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazione elementare in $\cos x$

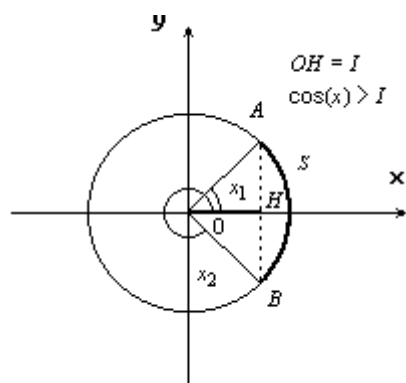
DEFINIZIONE

Si dice disequazione elementare in $\cos x$ la scrittura:

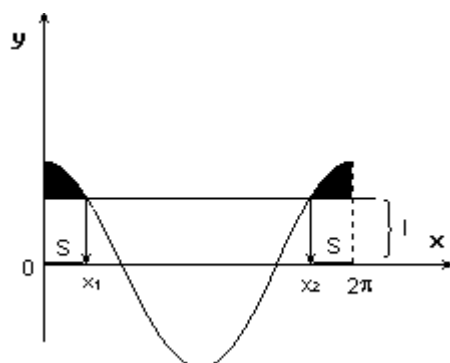
$$\cos x \stackrel{\geq}{<} 1$$

La soluzione coincide con l'intervallo X di tutti gli angoli che soddisfano alla (*). Per quanto già affermato tale soluzione può essere limitata al caso $x \in [0; 2\pi]$ o $x \in \hat{A}$.

Utilizzando il cerchio trigonometrico si ha:



Utilizzando il grafico della cosinusoide:



In entrambi i casi si ha:

$$X \equiv \{0 < x < x_1\} \cup \{x_2 < x < 2\pi\} \text{ soluzione fondamentale}$$

$$X \equiv \{2k\pi < x < x_1 + 2k\pi\} \cup \{x_2 + 2k\pi < x < 2\pi(k+1)\} \text{ soluzione generale}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

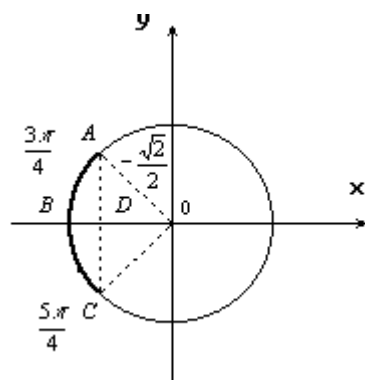
ESEMPIO

Risolvere: $2 \cos x + \sqrt{2} < 0$

L'equazione $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ ammette soluzione fondamentale:

$$x_1 = \frac{3}{4}\pi \wedge x_2 = \frac{5}{4}\pi$$

Utilizzando il cerchio trigonometrico si ha:



Gli angoli x il cui coseno è minore di $OD = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono quelli aventi il secondo estremo sull'arco

$$\widehat{ABC} \text{ con } x_A = \frac{3}{4}\pi \wedge x_C = \frac{5}{4}\pi.$$

Si ha:

$$X \equiv \left(\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right) \text{ oppure } X \equiv \left\{ \frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi \right\} \text{ soluzione fondamentale}$$

$$X \equiv \left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right) \text{ con } k \in Z \text{ soluzione generale.}$$