Le funzioni "arc"

Questo paragrafo utilizza concettualmente quanto esposto sulle funzioni inverse nel capitolo 1.
Infatti le funzioni "arc" sono le inverse rispettivamente della y = sen x; y = cos x; y = tan x e y = cot x considerate nei loro insieme di invertibilità.
In particolare si ha:

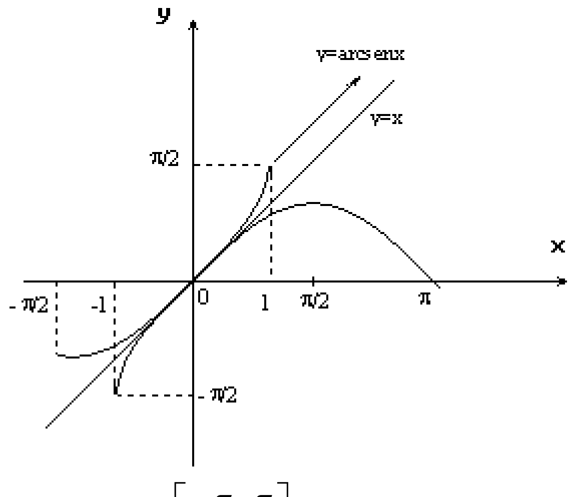
A) Inversa della funzione y = sen x ; y = arc sen x

La funzione y = sen x per $x \in [0;2\pi]$ essendo suriettiva non è interamente invertibile.
La sua "contratta" y = sen x per $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ risulta bijettiva (crescente nel senso stretto), quindi invertibile. Quindi la y = sen x ha per intervallo di invertibilità l'insieme chiuso $X \equiv \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, mentre il suo codominio resta: $Y \equiv [-1;1]$.
Sotto tali condizioni esiste l'inversa della y = sen x ed è detta arcoseno di α.
Si scrive: $(\text{sen } x)^{-1}$ = arc sen x.
Per quanto detto in 1.4.1 ha: y = arc sen x con :

Dominio: $-1 \le x \le 1$

Codominio: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

Per ottenere il suo grafico è sufficiente utilizzare il metodo di simmetrizzazione rispetto alla retta y = x.
Si ha:



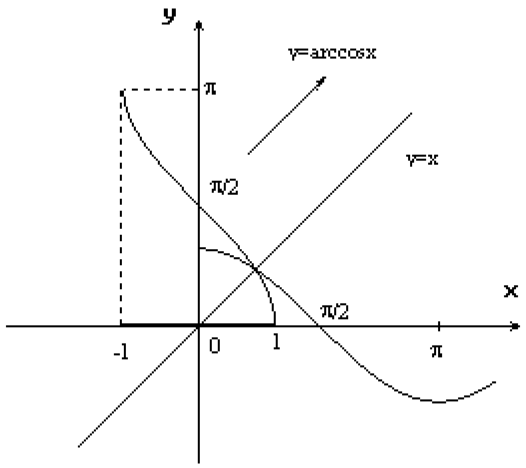
Essendo y = sen x crescente in $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ scende che la y = arc sen x è decrescente per $x \in [-1;1]$. Si noti che la y = arc sen x fornisce il valore dell'angolo y il cui seno è x.

ESEMPIO

$arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

B) Inversa della funzione y = cos x; y = arc cos x

La y = cos x è invertibile (decrescente in senso stretto), nell'intervallo $0 \le x \le \pi$ con $-1 \le y \le 1$.
Si scrive: $(\cos x)^{-1}$=arc cos x.
Il grafico della y = arc cos x si ricava con il solito procedimento di simmetrizzazione rispetto alla retta y = x.
Graficamente si ha:



Il dominio e codominio della y = arc cos x sono rispettivamente:

Dominio: $-1 \le x \le 1$
Codominio: $0 \le y \le \pi$

Essa è decrescente per $x \in [-1;1]$.
Si noti che la y = arc cos x fornisce il valore dell'angolo y il cui coseno è x.

ESEMPIO

$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

C) Inversa delle funzioni y = tan x e y = cot x; y = arc tan x e y = arc cot x

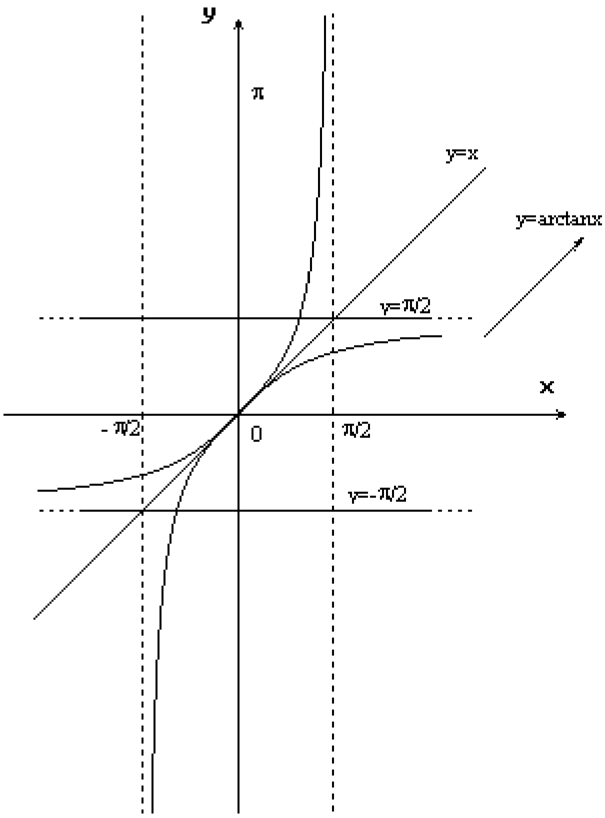
La y = tan x è crescente in senso stretto nell'intervallo: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ove assume valori $-\infty < x < +\infty$.
Quindi è invertibile per tali valori della x.
Si scrive:

$(\tan x)^{-1}$ = arc tan x

con:

$$\text{Dominio: } -\infty < x < +\infty$$
$$\text{Codominio: } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Essendo $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = -\frac{\pi}{2}$ gli asintoti verticali della y = tan x risulta ove le rette $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ sono gli asintoti orizzontale della y = arc tan x.
Graficamente si ha:



La y = arc tan x è crescente in $-\infty < x < +\infty$.
Essa fornisce i valori degli angoli y la cui tangente è x.

ESEMPIO

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{per } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \qquad \text{per } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

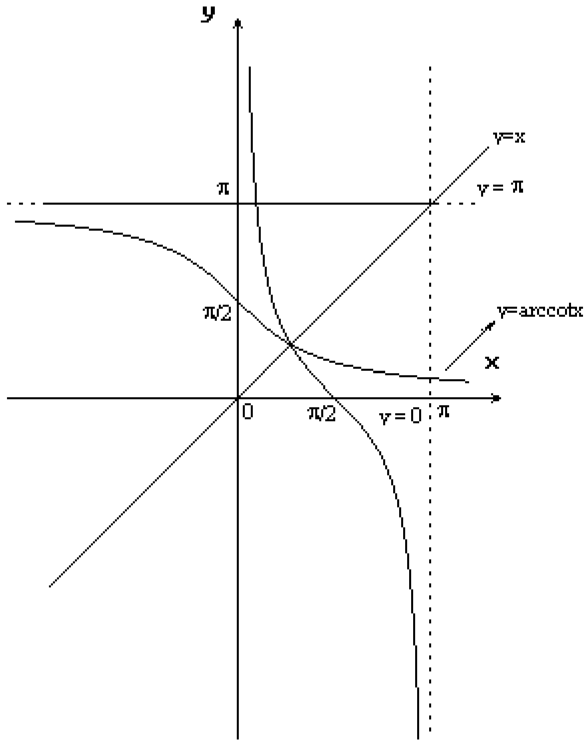
Analogamente la y = cot x è invertibile per $0 < x < \pi$ con $-\infty < y < +\infty$ in quanto ivi è decrescente in senso stretto.
Si scrive:

$(\cot x)^{-1}$=arc cot x

con:

Dominio: $-\infty < x < +\infty$
Codominio: $0 < y < \pi$.

Le rette y = 0 e y = π sono suoi asintoti orizzontale.
Graficamente si ha:



Essa fornisce i valori degli angoli y la cui cotangente è x.

ESEMPIO

$arc\cot(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{6}$ per $0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}$

$\text{arccot}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ per $0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}$

Ricordando quanto detto nel capitolo 1 si ha $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = x$.

$sen(arcsenx) = arcsen(senx) = x$
$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$
$\tan(\arctan x) = \arctan(\tan x) = x$
$\cot(arc\cot x) arc\cot(\cot x) = x$

ESEMPIO

$$\arctan\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$arcsen\left(sen\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

$$\tan(\arctan\sqrt{3})=\sqrt{3}\,.$$