Le funzioni derivate: tan x e cot x.
(equazioni e disequazioni relative)

Dopo aver introdotto le funzioni elementari sen x e cos x si esaminano le funzioni trigonometriche da esse derivate: y = tan x (tangente di x) e y = cot x (cotangente di x).

La funzione y =tan x.

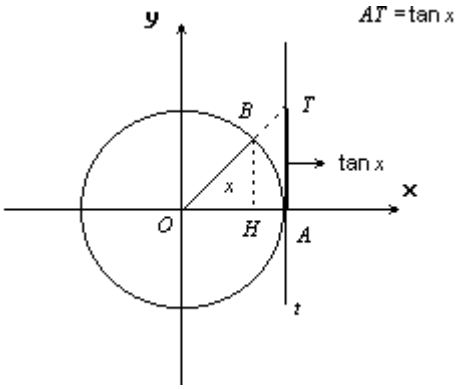
DEFINIZIONE

Si dice funzione tangente di un angolo il rapporto tra funzione y = sen x e y = cos x.
Si scrive: $y = \frac{senx}{\cos x}$ oppure y = tan x con cos x $\neq 0$.

$X \equiv \left\{ \left[0; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right] \right\}$ Dominio

$Y \equiv (-\infty; +\infty)$ Codominio

Sul cerchio trigonometrico la y = tan x coincide con la misura del segmento di tangente appartenente alla retta tangente (t) condotta dalla origine degli archi A alla circonferenza goniometrica e delimitata dalla origine stessa e dalla intersezione t del prolungamento del raggio passante per il punto estremo B dell'arco sotteso dall'angolo con tale tangente.



I segni assunti dalla y = tan x nei quattro quadranti sono desumibili da quelli assunti negli stessi quadranti dalle funzioni y = sen x e y = cos x. Si ha:

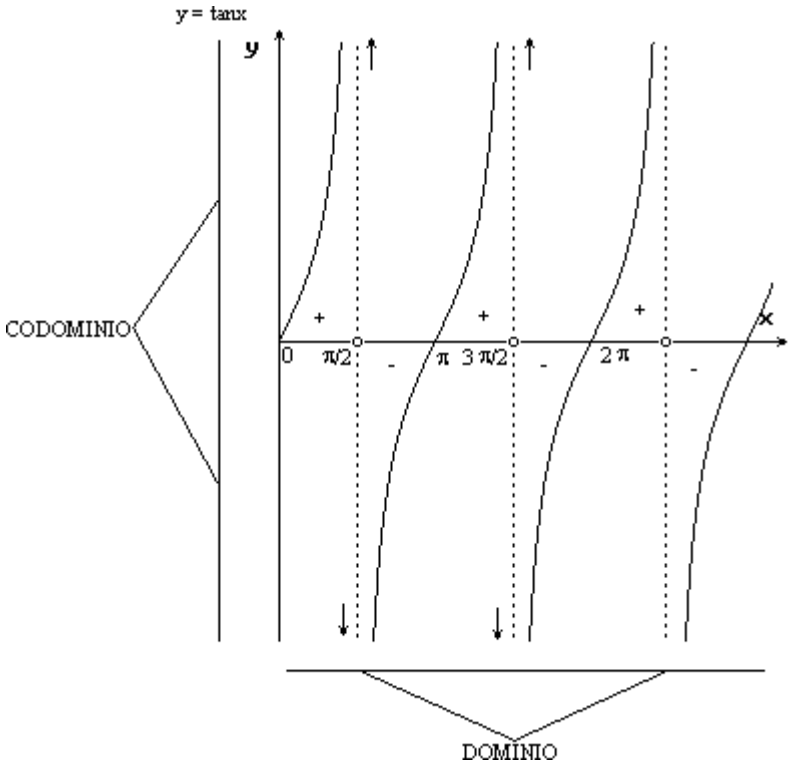
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad seg(\tan x) = \frac{(+)}{(+)} = (+)$ 1º quadrante

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $\quad seg(\tan x) = \frac{(+)}{(-)} = (-)$ 2º quadrante

$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ $\quad seg(\tan x) = \frac{(-)}{(-)} = (+)$ 3º quadrante

$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ $\quad seg(\tan x) = \frac{(-)}{(+)} = (-)$ 4º quadrante

Per avere l'andamento della y = tan x per $\forall x \in X$ si considera il suo grafico detto tangentoide.



Per quanto già detto in relazione al seno e al coseno di angoli notevoli scende:

$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3};$$
$$\tan\frac{\pi}{4}=1.$$

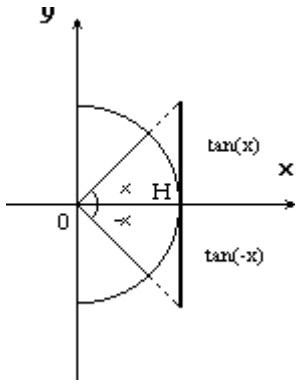
Dal grafico si nota:

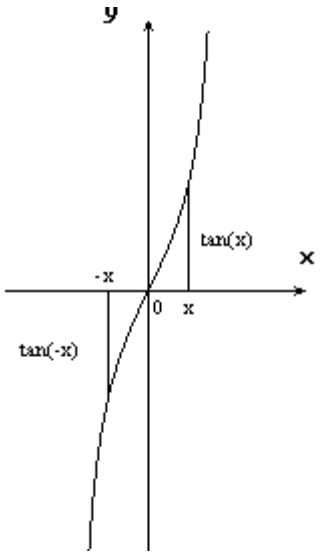
1) y = tan x è sempre crescente nel suo dominio ($\forall x \in X$)
2) Per $0 \le x \le 2\pi$ con $x \ne \frac{\pi}{2} \wedge x \ne \frac{3}{2}\pi$ ammette due asintoti verticali: $x=\frac{\pi}{2} \wedge x=\frac{3}{2}\pi$

Si scrive:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\pi\right)^-}\tan x=+\infty$$
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=-\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=-\infty$$

La scrittura indica l'operazione di limite che esula dal presente programma.
La funzione y = tan x è dispari: tan (-x) = -tan(x). Infatti sia dal cerchio trigonometrico che dal grafico della tangentoide risulta:





Inoltre richiamando quanto detto nel capitolo 1 sul rapporto di una funzione dispari e una pari scende:

$$\tan x = \frac{sen(x)[Dispari]}{\cos(x)[Pari]} \rightarrow [Dispari]$$

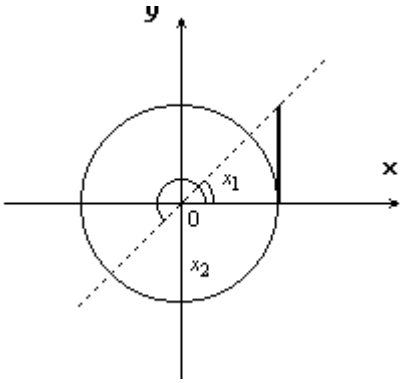
Periodo

Si ha $\tan(x+\pi) = \tan x$. Quindi $T = \pi$ è il periodo fondamentale di tan x.
Inoltre: $\tan(x+k\pi) = \tan x$. Quindi $T_1 = k\pi$ con $k \in Z$ è il periodo multiplo di tan x.
Scende che tan x è periodica di periodo $T = k\pi$.

Equazione elementare in tan x

DEFINIZIONE

Si dice equazione elementare in tan x la scrittura tan x = l con $l \in R$.



La sua soluzione fondamentale è:

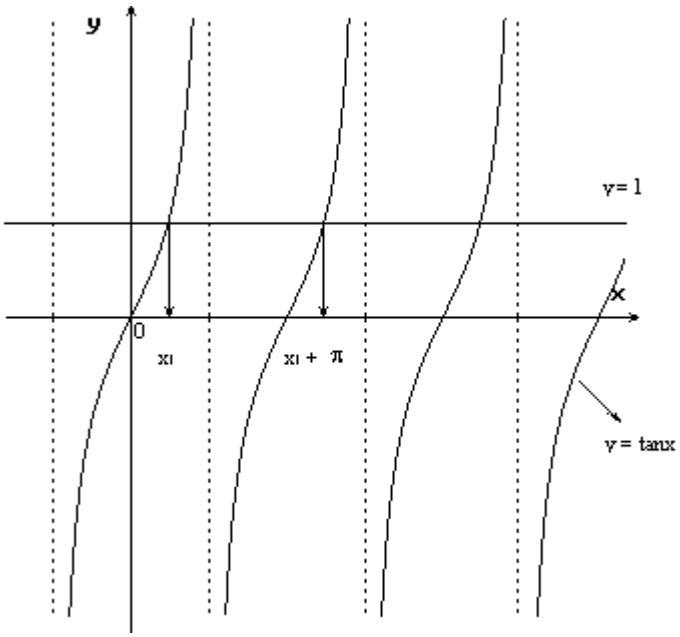
$$S\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x + \pi \end{cases} \qquad \text{con } x \in [0;2\pi]$$

Interpretazione grafica

L'equazione tan x = l può essere vista come sistema:

$$\begin{cases} y = \tan x \\ y = l \end{cases} \quad \text{con } l \in R$$

La sua soluzione è espressa dalle ascisse dei punti comuni alla tangentoide ed alla retta y = l.
Si ha:

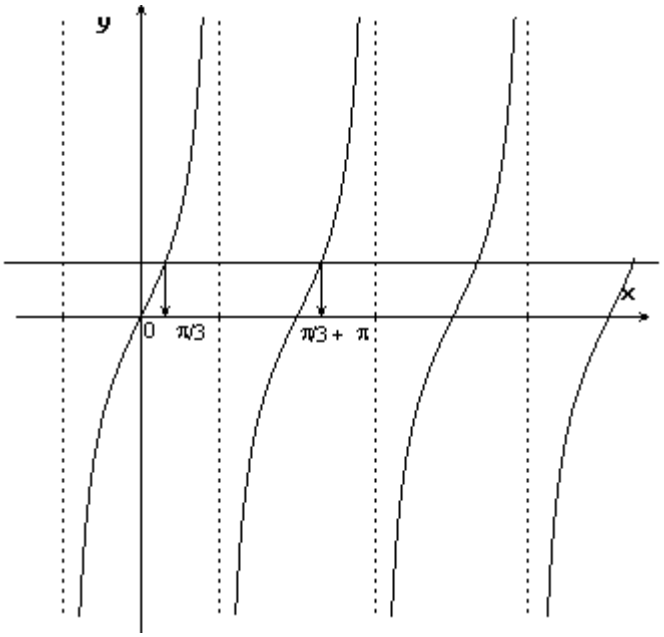


ESEMPIO

Risolvere l'equazione: $\tan x = \sqrt{3}$. Si ha: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ (soluzione generale)

Soluzione minima: $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \arctan\sqrt{3}$.

Graficamente:



Disequazione elementare in tan x

DEFINIZIONE

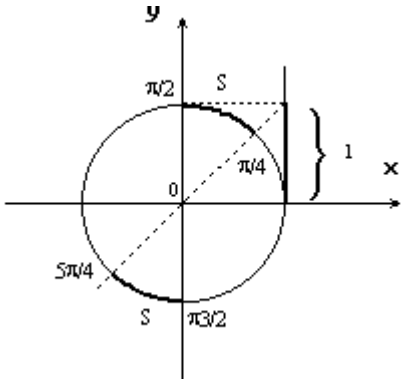
Si dice disequazione elementare in tan x la scrittura:

$$\tan x \gtreqless l \text{ con } l \in R \qquad (*)$$

La sua soluzione S è espressa da tutti i valori angolari che soddisfano la (*). Anch'essa può essere fondamentale o generale.
Si consideri il seguente

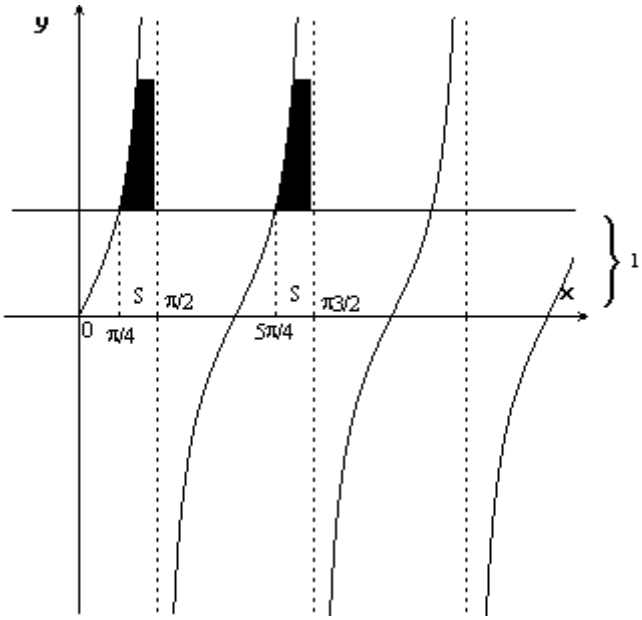
ESEMPIO

Risolvere tan x > 1. Dal cerchio trigonometrico risulta:



Da cui

$S \equiv \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ soluzione fondamentale

oppure $S \equiv \left(\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi+k\pi;\frac{3}{2}\pi+k\pi\right)$ con $k \in Z$ soluzione generale.

Dal grafico della tangente si ha: