Logaritmo decimale, naturale e cambio di base

I logaritmi con una stessa base sono detti famiglia di logaritmi in quella data base.
Ad esempio i logaritmi con a=3 formano la famiglia $y = \log_3 x$.
In matematica sono di particolare interesse due famiglie di logaritmi:

1) Logaritmi decimali o di Briggs

In essi a = 10.
Si scrive:

$$\log_{10} x = Logx$$

2) Logaritmi naturali o di Nepero

In essi a = e = 2.7192181…
Il numero "e", già incontrato a proposito della funzione esponenziale $y = e^x$, è un numero irrazionale di particolare significato matematico.
Esso è stato ottenuto da Nepero come risultato del limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Tale concetto esula dagli argomenti trattati nel presente testo.
Si scrive:

$$\log_e x = \ln x$$

Il cambio di base

Siano dati i logaritmi:

$$\log_a x \quad \text{e} \quad \log_b x \quad \text{con} \quad (a \wedge b) > 0 \wedge (a \wedge b) \neq 1$$

È possibile ricondurre i due logaritmi alla stessa base tramite la formula:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Un'immediata conseguenza di ciò è:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Il lettore dimostri quanto affermato come utile esercizio.
In particolare si ha:

$$\ln x = \frac{Logx}{Log_e} = (2{,}302585...)Logx$$

Inversamente:

$$Log_x = (0{,}434294...)\ln x$$

Tali formule permettono il passaggio dalla famiglia di logaritmi in base decimale a quella in base neperiana e viceversa.

ESEMPIO

a) Portare $\log_4 x$ in base b = 2.

Si ha:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2} = \frac{1}{2}\log_2 x$$

b) Portare $\log_3 5$ in base b = 3.

Si ha:

$$\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$$

c) Si ha Log 3,28 = 0,5158738.
Trovare il suo corrispondente in base “e”.

ln 3,28 = (2,302585)(0.5158738) = 1,187843.