Proprietà dei logaritmi

La funzione y = $\log_a x$ ha una particolare importanza anche per alcune sue proprietà notevoli.
Si ha:

1) $\log_a(x \cdot y \cdot ... \cdot z) = \log_a x + \log_a y + ... + \log_a z$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y = \log_a x + \mathrm{Co}\log_a y$

con $\mathrm{Co}\log_a y = -\log_a y$

3) $\log_a (x)^n = n\log_a x$

4) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$

È importante far notare che le funzioni:

1) Y = $\log_a(x \cdot y)$
2) Y = $\log_a x + \log_a y$

non coincidono in generale. Infatti per la (1) l'insieme di esistenza è dato da:

$$x \cdot y > 0$$

quindi per la x e y concordi di segno.
Per la (2) l'insieme è dato da:

$$\begin{cases} \mathrm{x} > 0 \\ \mathrm{y} > 0 \end{cases}$$

cioè per valori entrambi positivi della x e della y.
Non coincidente i due insieme di esistenza, le due funzioni non sono coincidente in genere.

ESEMPIO

Applicando la proprietà del prodotto si ha:

$$\log_a[(x-1)(x+1)] = \log_a(x-1) + \log_a(x+1)$$

Le funzioni:

$$y = \log_a[(x-1)(x+1)] \quad \text{e} \quad y = \log_a(x-1) + \log_a(x+1)$$

sono diverse.
Infatti l'I.E. della prima è dato da:

$$(\text{I.E.})_1 : (x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

Per la seconda si ha:

$$(\text{I.E.})_2 : \begin{cases} \text{x - 1} > 0 \\ \text{x} + 1 > 0 \end{cases} \rightarrow x > 1$$

Si noti che:

$$(\text{I.E.})_1 \neq (\text{I.E.})_2.$$

Si presentano alcuni esempi di applicazione del logaritmo da espressioni letterali:

ESEMPIO

a) Applicare il $\log_a x$ all'espressione con $(a > 0 \wedge a \neq 1)$.

$$N = \frac{(a-1)^2 \sqrt{a}}{a+1}$$

Si ha:

$$\log_a N = \log_a \frac{(a-1)^2 \sqrt{a}}{a+1} = \log_a [(a-1)^2 \cdot \sqrt{a}] - \log_a (a+1) =$$
$$\log_a (a-1)^2 + \log_a \sqrt{a} - \log_a (a+1) =$$
$$2 \log_a (a-1) + \frac{1}{2} \log_a a - \log_a (a+1) =$$
$$2 \log_a (a-1) - \log_a (a+1) + \frac{1}{2}$$

b) Applicare il $\log_a x$ all'espressione con $(a > 0 \wedge a \neq 1)$.

$$N = \frac{a^3 \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[3]{a^2}}$$

Si ha:

$$\log_a N = \log_a \frac{a^3 \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[3]{a^2}} = \log_a (a^3 \sqrt[5]{a^4}) - \log_a \sqrt[3]{a^2} =$$
$$\log_a a^3 + \log_a \sqrt[5]{a^4} - \log_a \sqrt[3]{a^2} =$$
$$3 \log_a a + \frac{1}{5} \log_a a^4 - \frac{1}{3} \log_a a^2 =$$
$$3 + \frac{4}{5} \log_a a - \frac{2}{3} \log_a a = 3 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{47}{15}$$

Dalle proprietà dei logaritmi scende:

1) $a^{\log_a x} = x \quad \text{con} \quad (a > 0 \wedge a \neq 1).$

2) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$

Infatti:

$$\log_a \frac{1}{x} = \log_a (x)^{-1} = -\log_a x.$$