Relazioni tra funzioni trigonometriche

Al fine di poter determinare il valore di una data funzione trigonometrica (elementare o derivata) conoscendo il valore di un'altra è utile stabilire le relazioni che legano tali funzioni tra loro.

A) Relazione tra sen x e cos x.

Dal teorema fondamentale della trigonometria : $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ scende:

$$senx = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \wedge cox = \pm\sqrt{1-sen^2 x}$$

I segni (+) o (-) vengono assegnati a seconda del quadrante al quale appartiene l'angolo x.

ESEMPIO

Stabilire il valore di cos x sapendo che sen x = $\frac{2}{3}$. Non stabilendo il quadrante al quale appartiene x scende:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Si ha:

$$(\cos x)_1 = \frac{\sqrt{5}}{3} \wedge (\cos x)_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ si ha $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ in quanto nel 1° quadrante cos x è positivo.

Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ si ha $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ in quanto nel 2° quadrante cos x è negativo.

B) Relazione tra senx e tanx

a) $\tan x = \frac{senx}{\cos x} = \frac{senx}{\pm\sqrt{1-sen^2 x}}$ per $\cos x \neq 0$

b) $senx = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Tale relazione si dimostra da quella del caso (a) risolta in sen x.

ESEMPIO

a) Stabilire il valore di tan x sapendo che sen x = $\frac{3}{4}$ con x $\in$ 2° quadrante.

Si ha: $\tan x = -\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{9}{16}}} = -\dfrac{3}{7}\sqrt{7}$

b) Stabilire il valore di sen x sapendo che tan x = 3 con x ∈ 3° quadrante.

Si ha: $senx = -\dfrac{3}{\sqrt{1+(3)^2}} = -\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$

C) Relazione tra cos x e tan x

a) $\tan x = \pm\dfrac{senx}{\cos x} = \pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$

b) $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$. Tale relazione si dimostra risolvendo la (a) rispetto a cos x.

D) Relazione tra tan x e cot x

a) $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

b) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Si porta a fine paragrafo la tabella riassuntiva delle relazioni tra funzioni elementari di uno stesso angolo includendo anche quelle tra y = sen x, y = cos x e y = cot x, la cui dimostrazione si lascia al lettore come utile esercizio.

	sen x	cos x	tan x	cot x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-sen^2 x}$	cos x	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\dfrac{senx}{\sqrt{1-sen^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	$\dfrac{1}{\cot x}$
cot x	$\dfrac{\pm\sqrt{1-sen^2 x}}{senx}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	cot x

Funzioni trigonometriche di angoli associati

Nel presente paragrafo vengono presentate le formule che esprimono le funzioni di angoli: complementari, supplementari, esplementari e che differiscono di π e di $\dfrac{3}{2}\pi$.

Si hanno le relazioni:

Angoli opposti	Angoli che differiscono di $\frac{\pi}{2}$
$sen(-x) = -sen$	$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -senx$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$
$\cot(-x) = -\cot x$	$\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\tan x$

Angoli complementari	Angoli che differiscono di π
$sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$	$sen(x+\pi) = -senx$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = senx$	$\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$	$\tan(x+\pi) = \tan x$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$	$\cot(x+\pi) = \cot x$

Angoli supplementari	Angoli che differiscono di $\frac{3}{2}\pi$
$sen(\pi - x) = senx$	$sen\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = -\cos x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = senx$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = -\cot x$
$\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\cot\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = -\tan x$

Angoli la cui somma è $\frac{3}{2}\pi$	Angoli esplementari
$sen\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$	$sen(2\pi - x) = -senx$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -senx$	$\cos(2\pi - x) = \cos x$
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \cot x$	$\tan(2\pi - x) = -\tan x$
$\cot\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \tan x$	$\cot(2\pi - x) = -\cot x$

Si fornisce la seguente regola:
Se all'interno della parentesi sono presenti gli angoli $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{2}\pi$ la funzione si trasforma nella corrispondente co-funzoine:

$$senx \rightleftarrows \cos x \qquad \tan x \rightleftarrows \cot x$$

Se all'interno della parentesi sono presenti gli angoli π o 2π la funzione rimane invariata. Il segno, in ogni caso, viene fornito a seconda del quadratane nel quale si trova l'angolo in parentesi.

Riduzione al primo quadrante

In molti casi è utile ricondurre l'angolo x al primo quadrante senza modificare la funzione trigonometrica considerata.
Tenendo conto del segno della funzione dell'angolo x, per eseguire tale operazione è conveniente utilizzare le formule contenente i multipli pari di $\frac{\pi}{2}$, cioè: π e 2π.
Si ha:

1) Se x $\in$ 1º quadrante $\rightarrow$ y = x
2) Se x $\in$ 2º quadrante $\rightarrow$ y = $\pi - x$
3) Se x $\in$ 3º quadrante $\rightarrow$ y = $x - \pi$
4) Se x $\in$ 4º quadrante $\rightarrow$ y = $2\pi - x$

ESEMPIO

Si consideri l'esempio.

Determinare il valore delle seguenti funzioni riducendo l'angolo al 1º quadrante.

a) sen 150º
Essendo 150º $\in$ 2º quadrante si ha y = 180º - 150º = 30º.
Quindi: sen 150º = sen(180º - 150º) = sen 30º = $\frac{1}{2}$

b) cos 210º
Essendo 210º $\in$ 3º quadrante si ha y = 210º - 180º = 30º.
Quindi: cos 210º = -cos(210º - 180º) = -cos 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) tan 300º
Essendo 300º $\in$ 4º quadrante si ha y = 360º - 300º = 60º.
Quindi: tan 300º = -tan(360º - 300º) = -tan 60º = $-\sqrt{3}$.

Se l'angolo x supera l'angolo giro, per determinare le sue funzioni trigonometriche viene ricondotto al primo giro (minore dell'angolo giro) sottraendo il numero necessario di angoli e operando sul valore trovato con metodo della riduzione al 1º quadrante.

ESEMPIO

Determinare: sec 840º.

Si ha:

$$\sec 840° = \sec(840° - 2 \cdot 360°) = \sec(840° - 720°) = \sec(120°) =$$
$$= \frac{1}{\cos(120°)} = \frac{1}{\cos(180° - 120°)} = \frac{1}{\cos 60°} =$$
$$= -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Funzioni trigonometriche di somme
e sottrazioni di angoli

Le funzioni trigonometriche non sono lineari.
Quindi:

$$f(x \pm y) \neq f(x) \pm f(y).$$

Si riporta la tabella riassuntiva delle suddette formule:

$$\boxed{\begin{array}{l} sen(x \pm y) = senx \cos y \pm \cos x\, seny \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp senx\, seny \\ \tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ \cot(x \pm y) = \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x} \end{array}}$$

Le su indicate formule possono essere utilizzate anche per la somma algebrica di più angoli.
Infatti ad esempio

$$sen(x + y - z) = sen[(x + y) - z] = sen(x + y)\cos z - \cos(x + y) senz =$$
$$= (senx \cos y + \cos x\, seny)\cos z - (\cos x \cos y - senx\, seny) senz =$$
$$= senx \cos y \cos z + \cos x\, seny \cos z - \cos z \cos y\, senz + senx \cos y\, senz$$

ESEMPIO

Determinare il valore delle funzioni:

a)

$$sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = sen\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4} sen\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

b)

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3} \cdot \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

c)

$$\mathrm{os}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-sen\frac{\pi}{4}sen\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Come utile esercizio si lascia al lettore la dimostrazione delle uguaglianze:

$$sen\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3} \qquad \cot\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$$

Formule notevoli

Nel presente paragrafo vengono riportate le formule notevoli della trigonometria.
Per la loro dimostrazione vengono forniti consigli opportuni.

Forme di duplicazione

x→2x

Per la dimostrazione usare le formule di somme di angoli ponendo x=y.

$$\boxed{\begin{array}{l} sen2x=2senx\cos x \\ \cos 2x=\cos^2 x-sen^2x \\ \cos 2x=1-2sen^2x \\ \cos 2x=2\cos^2 x-1 \\ \tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \\ \cot 2x=\dfrac{\cot^2 x-1}{2\cot x} \end{array}}$$

Formule di bisezione

$$x \to \frac{x}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} sen\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}; \\ \cos\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}; \\ \tan\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \mp\frac{1-\cos x}{senx} = \mp\frac{senx}{1+\cos x}; \\ \cot\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \mp\frac{1+\cos x}{senx} = \mp\frac{senx}{1-\cos x}. \end{array}}$$

Per la dimostrazione $\cos 2x = 1 - 2sen^2$ o $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ponendo $x \to \frac{x}{2}$.

Formule di prostaferesi (trasformano somme in prodotti).

$$senx + seny = 2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$senx - seny = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan x + \tan y = \frac{sen(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\tan x - \tan y = \frac{sen(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cot x + \cot y = \frac{sen(x+y)}{senx\, seny}$$

$$\cot x - \cot y = \frac{sen(x-y)}{senx\, seny}$$

Formule parametriche

$$senx = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

con $t=\tan\frac{x}{2}$, con $x\neq\pi+2k\pi$ si dimostrano dalle formule $sen2x$ e $\cos 2x$ ponendo $x\rightarrow\frac{x}{2}$ e ricordando che $sen^2x+\cos^2 x=1$.